Cahier de vacances Mathématiques ECG

Chers futurs étudiants, avant de nous rencontrer l'an prochain voici quelques exercices à maitriser en vue de votre scolarité en classe préparatoire ECG.

Tout d'abord, il est bon de savoir que la calculatrice est interdite en mathématiques aux concours. Vous ne l'utiliserez donc jamais l'an prochain. Revoir cet été le calcul est indispensable afin que celui-ci ne soit pas un frein dans la résolution des exercices. Vous trouverez donc ici quelques rappels concernant les règles de calcul et des exercices d'entraînement.

Vous trouverez également des rappels de résolution d'équation et des exercices d'entraînement.

Il y aura une évaluation d'une heure peu coefficientée à la rentrée sur ce type d'exercices. Rappelez-vous qu'il est plus utile de travailler régulièrement (2 exercices tous les jours durant un mois) plutôt que de travailler intensément la veille de la rentrée. Ceci restera vrai durant l'année !

Je vous souhaite de bonnes vacances !

Mme Gauci

Les puissances

Si x est un nombre réel et n est un entier naturel différent de 0, alors on note :

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \times x$$

où dans la multiplication ci-dessus, le symbole x apparaît n fois et le symbole $\times$ apparaît $n-1$ fois.

La notation x^n se lit indifféremment "x élevé à la puissance n" ou "x puissance n" ou encore "x exposant n" et on dit que n est placé en **exposant** de x dans cette écriture.

Par exemple, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{81}$.

De plus, on choisit, par convention, si x est un nombre réel, de poser $x^0 = 1$. Ce choix conventionnel est effectué pour son côté pratique dans certains types de calcul, il ne faut pas chercher à lui attribuer du sens.

Le seul intérêt de cette notation en exposant est de raccourcir l'écriture de calculs qui seraient longs et fastidieux à présenter dans le cas contraire. Il est alors important de savoir manipuler efficacement cette notation en connaissant pour cela quelques formules de calcul absolument immédiates. Si x et y sont des nombres réels et n et m des nombres entiers naturels, alors on dispose des formules suivantes :

$$x^{m+n} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m+n \text{ fois}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = x^m x^n$$

$$(xy)^n = \underbrace{(xy) \times \cdots \times (xy)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{y \times \cdots \times y}_{n \text{ fois}} = x^n y^n$$

$$(x^m)^n = \underbrace{(x^m) \times \cdots \times (x^m)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ fois}} \times \cdots \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ fois}}}_{n \text{ fois}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{mn \text{ fois}} = x^{mn}$$

Par exemple, $2^5 = 2^{2+3} = 2^2 \times 2^3$, $(3 \times 5)^4 = 3^4 \times 5^4$ et $(2^4)^2 = 2^8$.

On généralise cette opération au cas des exposants entiers relatifs pour des nombres réels différents de 0.

Si x est un nombre réel différent de 0 et si n est un nombre entier relatif strictement négatif, alors on note :

$$x^n = (x^{-1})^{-n} = \underbrace{x^{-1} \times \cdots \times x^{-1}}_{-n \text{ fois}}$$

Il convient également de respecter des **priorités opératoires** lorsque l'on présente des calculs faisant intervenir à la fois les opérations arithmétiques et les exposants : les puissances sont prioritaires sur toutes les opérations arithmétiques et dans le cas de plusieurs exposants consécutifs, en l'absence de parenthèses, les exposants se calculent du haut vers le bas.

Par exemple, $5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$ et $(5 \times 2)^3 = 10^3 = 1\,000$ et $2^{2^3} = 2^8 = 256$ alors que $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

Il est important d'observer qu'à cause de ces priorités, lors de l'élévation d'un nombre négatif à une certaine puissance, il est nécessaire d'utiliser des parenthèses pour éviter tout risque d'ambiguïté.

Par exemple, $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ et $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$, donc $(-2)^4 \neq -2^4$.

Enfin, le cas particulier des puissances de 10 est la source de ce que l'on appelle la **notation scientifique**, qui est une manière adaptée d'écrire les nombres qui sont soit très grands, soit très proches de 0.

Par exemple, $3\,000\,000\,000\,000$ est un nombre gigantesque un peu long à écrire mais on peut constater qu'il est égal, sous une forme plus condensée, à 3×10^{12}. De même, observons que $0,000\,000\,000\,000\,7$ est un nombre très proche de 0 qui peut s'écrire de façon plus courte sous la forme 7×10^{-12}.

En particulier, observons que pour $m = 0$, la première formule donne $x^{-n} = \dfrac{x^0}{x^n} = \dfrac{1}{x^n}$.

On peut comprendre les raisons d'être de la notation x^{-1} pour désigner l'inverse $\dfrac{1}{x}$ d'un nombre réel différent de 0 ainsi que la convention de poser $x^0 = 1$. Grâce à ces choix, toutes les écritures sont cohérentes par rapport aux formules précédentes : on a par exemple $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^0}{x^1} = x^{0-1} = x^{-1}$ et $x \times \dfrac{1}{x} = x^1 \times x^{-1} = x^{1-1} = x^0 = 1$.

Les fractions

L'opération de division s'écrit le plus couramment sous forme de fraction, qui est une notation dans laquelle deux nombres sont superposés verticalement et séparés par un trait horizontal.

Si x est un nombre réel et y est un nombre réel différent de 0, alors la **fraction** désignant le résultat de la division de x par y est la notation :

$$\frac{x}{y}$$

composée d'un **numérateur** x, d'un **dénominateur** y et d'un trait de fraction **horizontal** les séparant.

Cette notation est particulièrement commode pour manipuler la notion d'inverse : il suffit pour cela d'échanger le numérateur et le dénominateur. Si x et y sont des nombres réels différents de 0, alors $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$.

Par exemple, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ et $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\pi}$.

Parmi ces fractions, on distingue tout particulièrement celles dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers, puisque dans ce cas elles correspondent à ce que nous avons appelé des nombres rationnels. Si p est un nombre entier relatif et q est un nombre entier naturel différent de 0, on dit donc que $\frac{p}{q}$ est une **fraction rationnelle**.

Il existe plusieurs règles de calcul absolument fondamentales dans la manipulation des fractions et des opérations arithmétiques. Il n'est pas envisageable d'éprouver la moindre difficulté avec l'une ou l'autre des ces règles de calcul que l'on passe en revue ci-dessous.

Tout d'abord, les facteurs communs au numérateur et au dénominateur d'une fraction sont **simplifiables**. Si x est un nombre réel et si a et y sont des nombres réels différents de 0, alors :

$$\frac{a \times x}{a \times y} = \frac{x}{y}$$

Par exemple, $\frac{8}{6} = \frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{\cancel{2} \times 4}{\cancel{2} \times 3} = \frac{4}{3}$ et $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{\frac{1}{7} \times 3}{\frac{1}{7} \times 4} = \frac{\cancel{\frac{1}{7}} \times 3}{\cancel{\frac{1}{7}} \times 4} = \frac{3}{4}$.

La notation de fraction peut tout à fait, comme dans le second exemple ci-dessus, être utilisée avec un numérateur et un dénominateur qui sont eux-mêmes des fractions. Dans ce cas, il est important d'effectuer des traits de fractions de longueurs différentes pour éviter les éventuelles ambiguïtés, en écrivant par exemple :

$$\frac{\frac{x}{x^2+1}}{1 + \frac{x}{x^2+1}}$$

En particulier, on prendra garde en général à ne surtout pas confondre $\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$ et $\frac{\frac{1}{x}}{y} = \frac{1}{xy}$.

Il est essentiel de ne pas utiliser cette règle de simplification n'importe comment, il s'agit bien précisément d'une simplification de **facteurs communs** au numérateur et au dénominateur et en aucun cas d'autre chose que de facteurs communs.

Convenons dès maintenant qu'il ne viendra en particulier à l'idée de personne de proposer des simplifications **totalement farfelues** du type $\frac{2+3}{2} = \frac{\cancel{2}+3}{\cancel{2}} = 3$ ou $\frac{2x+3}{3} = \frac{2x+\cancel{3}}{\cancel{3}} = 2x$. Le fait de voir un même nombre de part et d'autre d'un trait de fraction n'est pas suffisant pour pouvoir les simplifier, encore faut-il que les opérations soient les bonnes.

Cette règle de simplification conduit à dégager, dans le contexte évoqué ci-dessus des fractions rationnelles, la notion de **fraction irréductible** : on dira qu'une fraction rationnelle $\frac{p}{q}$ est irréductible si les nombres entiers p et q n'ont pas de facteur commun qui soit un nombre entier (autre que 1 bien sûr). Alors toute fraction rationnelle est égale à une unique fraction irréductible que l'on obtient en simplifiant le plus possible les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Par exemple, $\frac{90}{120} = \frac{\cancel{2}\times 45}{\cancel{2}\times 60} = \frac{45}{60} = \frac{\cancel{3}\times 15}{\cancel{3}\times 20} = \frac{15}{20} = \frac{\cancel{5}\times 3}{\cancel{5}\times 4} = \frac{3}{4}$.

En classe préparatoire, lorsque la réponse à une question posée fait intervenir une fraction rationnelle, on attend en général que celle-ci puisse être présentée sous forme de fraction irréductible, simplifier les fractions qui ne sont pas irréductibles est donc une bonne habitude à prendre.

Cette technique de simplification des fractions peut alors être utilisée en sens inverse pour additionner des fractions en utilisant une opération dite de **mise au même dénominateur**.

Si a et c sont des nombres réels et b et d des nombres réels différents de 0, alors :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\times d}{b\times d} + \frac{b\times c}{b\times d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Par exemple, $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2\times 5}{15} + \frac{3\times 4}{15} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

Ensuite, les produits de fractions se manipulent simplement en effectuant séparément des multiplications entre les numérateurs et entre les dénominateurs.

Si a et c sont des nombres réels et b et d des nombres réels différents de 0, alors :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Par exemple, $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3\times 7}{4\times 5} = \frac{21}{20}$.

Enfin, les quotients de fractions se ramènent à des multiplications en utilisant les inverses.

Si a est un nombre réel et b, c et d des nombres réels différents de 0, alors :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Par exemple, $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3\times 5}{4\times 2} = \frac{15}{8}$.

Les racines carrées

Il est important de connaître les règles de manipulations opératoires liées aux fonctions usuelles. Pour les fonctions carré, inverse et cube qui sont définies par des opérations purement arithmétiques, ce sont les propriétés habituelles des opérations, comme les puissances, qui ont déjà été passées en revue antérieurement. Pour les fonctions racine carrée, logarithme népérien et exponentielle, il existe un certain nombre de propriétés calculatoires en interaction avec les opérations arithmétiques qu'il est fondamental de maîtriser sans hésitation.

Proposition 0.1 : Propriétés arithmétiques de la fonction racine carrée

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Alors $a \times b \in \mathbb{R}_+$.

Donc chacun des trois nombres $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b}$ existe.

De plus, $\sqrt{a} \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{b} \in \mathbb{R}_+$, donc par règle des signes, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \in \mathbb{R}_+$.

Enfin, par propriété des puissances, $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$.

Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est un nombre réel positif ou nul dont le carré vaut $a \times b$.

Donc par définition, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}_+$. Donc chacun des trois nombres $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ existe.

De plus, $\sqrt{a} \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{b} \in \mathbb{R}_+^*$, donc par règle des signes, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \in \mathbb{R}_+$.

Enfin, par propriété des puissances, $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$.

Donc $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est un nombre réel positif ou nul dont le carré vaut $\dfrac{a}{b}$.

Donc par définition, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. □

Il n'est pas vrai que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Par exemple, si $a = 1$ et $b = 1$, alors $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

Il est donc absolument essentiel de bien faire la différence entre les opérations arithmétiques $+$ et $\times$ dans le cadre de la manipulation de racines carrées.

Exemple 0.2

Les propriétés arithmétiques de la fonction racine carrée permettent de nombreuses simplifications dans des calculs variés. En particulier, pour les racines carrées de nombres entiers naturels, on peut simplifier ce que l'on appelle les facteurs carrés sous la racine.

Par exemple, $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ car $4 = 2^2$ et $2 \geq 0$.

Ou encore $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ car $9 = 3^2$ et $3 \geq 0$.

De telles simplifications sont souvent recommandées lors de la résolution d'équations du second degré. Considérons par exemple l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Le trinôme $x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ possède deux solutions données par $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2}$.

Or $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ car $4 = 2^2$ et $2 \geq 0$.

Donc $x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2(1 - \sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2(1 + \sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Exemple 0.3

Il faut également savoir simplifier l'expression du quotient d'un nombre positif par sa racine carrée.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}$.

Par exemple, $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Enfin, il existe une technique de simplification des expressions faisant apparaître une somme ou une différence de deux racines carrées au dénominateur d'une fraction utilisant le concept de **quantité conjuguée**.

Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, alors on dit que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont deux quantités conjuguées l'une de l'autre.

Proposition 0.4 : Produit de quantités conjuguées

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Alors $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

Démonstration. Par identité remarquable, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$. □

Cette formule permet de simplifier des fractions contenant une expression du type $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ au dénominateur, en multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

Exemple 0.5

On a $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

De même, $\dfrac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \dfrac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \dfrac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Ou encore, $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Exponentielle et ln

Proposition 0.6 : Propriétés arithmétiques de la fonction logarithme népérien

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

En conséquence, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et en particulier, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Démonstration des conséquences. On a $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$, donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1) - \ln(a) = 0 - \ln(a) = -\ln(a)$. $\square$

Proposition 0.7 : Propriétés arithmétiques de la fonction exponentielle

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

En conséquence, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ et en particulier, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

Démonstration des conséquences. On a $e^a = e^{(a-b)+b} = e^{a-b} \times e^b$ donc $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ car $e^b \neq 0$.

Donc $e^{-a} = e^{0-a} = \frac{e^0}{e^a} = \frac{1}{e^a}$. $\square$

Remarque 0.8 En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(a^2) = 2\ln(a)$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(e^a)^2 = e^{2a}$.

Equations

Une équation est une égalité entre deux formules mathématiques, faisant intervenir au moins une variable, souvent mais pas toujours notée x, que l'on appelle l'inconnue et une inéquation est une inégalité du même type.

Résoudre une équation, ou une inéquation, signifie déterminer, s'il en existe, **toutes** les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité, ou l'inégalité, étudiée est vérifiée, et ce de manière argumentée.

Tout résolution d'équation ou d'inéquation se rédige en trois étapes obligatoires :

- La détermination du **domaine** de résolution, c'est-à-dire de l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles les expressions mathématiques apparaissant dans l'équation ou l'inéquation sont correctement définies. Le domaine est parfois donné dans l'énoncé : dans ce cas, et dans ce cas uniquement, cette étape peut être ignorée.
- La **résolution** proprement dite de l'équation ou inéquation étudiée par une méthode appropriée qui repose le plus souvent sur des mélanges de raisonnements par équivalences successives et éventuellement de disjonctions de cas.
- La rédaction d'une **conclusion** donnant l'ensemble des solutions de l'équation ou inéquation étudiée.
  La réponse finale doit être $\boxed{\text{encadrée}}$ à la règle, avec exactement quatre traits.

Tout d'abord, la question de la détermination du **domaine de résolution** d'une équation est liée aux trois opérations interdites en mathématiques que sont : la division par zéro, le calcul de la racine carré d'un nombre réel strictement négatif et le calcul du logarithme népérien d'un nombre réel négatif ou nul.

Autrement dit, il existe trois contraintes relatives à ces opérations :

- Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{x}{y}$ est correctement défini à condition que $y \neq 0$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x}$ est correctement défini à condition que $x \geq 0$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\ln(x)$ est correctement défini à condition que $x > 0$.

Ainsi, dans une résolution d'équation, si aucune opération de division, racine carrée, ou logarithme népérien n'apparaît, alors le domaine de résolution est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Sinon, il faut mener une analyse au cas par cas des trois conditions énoncées ci-dessus afin de déterminer le domaine de résolution $\mathcal{D}$.

Ensuite, les techniques de résolution d'équations font principalement intervenir des raisonnements par équivalences successives dont nous rappelons les principaux ci-dessous (la plupart relèvent de la partie précédente).

- Ajouter membre à membre une constante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, a = b \Longleftrightarrow a + c = b + c$$

- Multiplier membre à membre par une constante non-nulle :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}^*, a = b \Longleftrightarrow a \times c = b \times c$$

- Élever au carré membre à membre, à condition que tous les termes soient positifs :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2$$

- Prendre membre à membre l'image par une fonction usuelle sans effectuer d'opération interdite :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall b \in \mathbb{R}^*, a = b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, a = b \Longleftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, a = b \Longleftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a = b \Longleftrightarrow e^a = e^b$$

Observons que la première des propriétés citées ci-dessus permet systématiquement de "passer tous les termes de l'équation du même côté" et de se ramener à une équation de la forme $f(x) = 0$.

Ce type d'équation est souvent favorable, car il existe des règles de calcul permettant de déterminer à quelle(s) condition(s) une quantité est nulle, en particulier lorsqu'elle s'exprime sous forme d'un produit ou d'un quotient.

Proposition 0.76 : Règle du produit nul

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $a \times b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs au moins est nul.

Proposition 0.77 : Règle du quotient nul

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Alors $\dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0$.

Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul.

Ces observations permettent de cibler les opérations intéressantes pour la résolution purement algébrique d'une équation du type $f(x) = 0$. Il est recommandé dans une telle situation de privilégier les opérations :

- de factorisation, pour tenter d'exprimer $f(x)$ sous forme d'un produit et lui appliquer la règle du produit nul.
- de réduction au même dénominateur en présence de fractions, pour tenter d'exprimer $f(x)$ sous forme d'un quotient et lui appliquer la règle du quotient nul.

Enfin, nous avons déjà eu l'occasion d'observer que la technique d'élévation au carré d'égalités à termes positifs pouvait être l'occasion de l'introduction de raisonnements par disjonction de cas dans le courant de la résolution d'une équation.

La liste de techniques générales présentées ci-dessus permettra de venir à bout de presque toutes les situations rencontrées en classe préparatoire. N'oublions pas d'ajouter que certaines catégories d'équations ont été résolues de manière systématique au lycée et que l'on suppose que les méthodes de résolution associées sont connues : il s'agit des équations affines et des équations du second degré.

- Une **équation affine** est une équation de la forme $ax + b = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
  Si $a \neq 0$, alors on résout une telle équation par équivalences successives.
  On a $ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\dfrac{b}{a}$, donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}}$
  Si $a = 0$, alors l'équation est équivalente à $b = 0$.
  Donc si $a = 0$ et $b = 0$, alors cette équation est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$
  Et si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors cette équation est fausse pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$
- Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Une telle équation peut être résolue par le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
  Si $\Delta < 0$, alors $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$
  Si $\Delta = 0$, alors $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}}$
  Si $\Delta > 0$, alors $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$

Que ce soit pour les équations affines ou les équations du second degré, on attend systématiquement une résolution explicite au cas par cas avec les calculs intermédiaires menant à l'ensemble des solutions, il ne s'agit pas de se contenter de donner la réponse.

Enfin, il est particulièrement recommandé avant d'écrire une conclusion de vérifier que les solutions trouvées appartiennent bien au domaine de résolution de l'équation d'une part et sont bien effectivement des solutions de l'équation posée d'autre part. Lorsque cette vérification se passe bien, cela ne garantit pas que la résolution est correcte, mais en revanche, lorsque la vérification ne fonctionne pas, on **détecte** ainsi nécessairement une erreur de calcul ou de raisonnement et dans ce cas il faut impérativement recommencer la résolution de l'équation.

Exemple 0.78: Résolution de l'équation $7 - 2x = 3x + 2$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On résout dans le domaine l'équation par équivalences successives. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$7 - 2x = 3x + 2 \Longleftrightarrow 7 - 2 = 3x + 2x \Longleftrightarrow 5 = 5x \Longleftrightarrow x = 1$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}.}$

Exemple 0.79: Résolution de l'équation $\dfrac{2x+1}{x-2} = 3$

Domaine : L'expression $\dfrac{2x+1}{x-2}$ existe si $x - 2 \neq 0$. Or $x - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 2$.

Donc le domaine de résolution est $\mathcal{D} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R}\setminus\{2\}$ (on dit que 2 est une valeur interdite).

Résolution : On résout dans le domaine l'équation par équivalences successives. Pour tout $x \neq 2$:

$$\frac{2x+1}{x-2} = 3 \Longleftrightarrow 2x + 1 = 3(x-2) \Longleftrightarrow 2x + 1 = 3x - 6 \Longleftrightarrow 2x - 3x = -6 - 1 \Longleftrightarrow -x = -7 \Longleftrightarrow x = 7$$

Or $7 \in \mathcal{D}$, donc l'équation a une unique solution donnée par $x = 7$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \{7\}.}$

Exemple 0.80: Résolution de l'équation $\dfrac{2x+1}{x-2} = 2$

Domaine : L'expression $\dfrac{2x+1}{x-2}$ existe si $x - 2 \neq 0$. Or $x - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 2$.

Donc le domaine de résolution est $\mathcal{D} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R}\setminus\{2\}$ (on dit que 2 est une valeur interdite).

Résolution : On résout dans le domaine l'équation par équivalences successives. Pour tout $x \neq 2$:

$$\frac{2x+1}{x-2} = 2 \Longleftrightarrow 2x + 1 = 2(x-2) \Longleftrightarrow 2x + 1 = 2x - 4 \Longleftrightarrow 2x - 2x = -4 - 1 \Longleftrightarrow 0 = -5$$

Or la propriété $0 = -5$ est fausse, donc en vertu du principe de raisonnement par équivalence, on en déduit que pour tout $x \neq 2$, l'égalité $\dfrac{2x+1}{x-2} = 2$ est fausse également.

Donc l'équation n'admet aucune solution.

Conclusion : L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

Exemple 0.81: Résolution de l'équation $x^2 = x$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On résout dans le domaine l'équation par équivalences successives. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 = x \Longleftrightarrow x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

On a utilisé une factorisation judicieuse suivie de la règle du produit nul, plutôt que d'utiliser la méthode de résolution des équations du second degré qui aurait pris plus de temps sur cet exemple.

Conclusion : L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \{0, 1\}.}$

Exemple 0.82: Résolution de l'équation $x^2 = x + 2$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On se ramène à une équation du second degré. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 = x + 2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Or le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, donc l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ possède deux solutions données par $\dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $\dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 2\}.}$

Exemple 0.83: Résolution de l'équation $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x}{x-1}$

Domaine : L'expression $\dfrac{x-1}{x}$ existe si $x \neq 0$ et l'expression $\dfrac{x}{x-1}$ existe si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$.

Donc le domaine de résolution est $\mathcal{D} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Résolution : On résout dans le domaine l'équation par équivalences successives. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$:

$$\frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-1} \Longleftrightarrow (x-1)^2 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 \Longleftrightarrow -2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Or $\dfrac{1}{2} \in \mathcal{D}$, donc l'équation possède une unique solution donnée par $x = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}.}$

○ **Exercice 1** Résoudre méthodiquement chacune des équations suivantes :

(1) $\dfrac{3}{2}x - 2 = -\dfrac{1}{2}x + 2$

(2) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{x+1}{4}$

(3) $\dfrac{x-2}{x+2} = -3$

(4) $\dfrac{6x-2}{3x+2} = 2$

(5) $5 + \dfrac{4}{x-1} = 6$

(6) $x^2 = -3x$

(7) $x^2 = 16$

(8) $x^2 = 2x + 3$

(9) $x^2 = x - 1$

(10) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

(11) $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$

(12) $x^2 - 2x - 4 = 0$

(13) $(x+1)(x^2 - 3x + 2) = 0$

(14) $\dfrac{x+1}{x-1} = x$

(15) $\dfrac{x+1}{x-1} = -x$

(16) $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+4}{x+2}$

(17) $\dfrac{2x-1}{x^2-1} = 0$

(18) $1 - \dfrac{1}{x^2+1} = x$

(19) $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 0$

(20) $\ln(x) - \ln(x-1) = 1$

(21) $\ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \ln 2$

(22) $\ln(3x - 2x^2) = 0$

(23) $e^{4x^2-1} = \dfrac{1}{e^{3x}}$

(24) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1}{2}$

Techniques usuelles

Les opérations les plus courantes pour la résolution d'inéquations par le calcul direct sont les suivantes :

- Ajouter une même expression de part et d'autre du signe $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$

$$5x - 2 \geq 3 \iff 5x \geq 3 + 2$$

- Multiplier par une même expression **strictement positive** de part et d'autre du signe $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$

$$\frac{3x}{4} < 1 \iff 3x < 4$$

- Multiplier par une même expression **strictement négative** de part et d'autre du signe $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$ et **changer le sens de l'inégalité**

$$-\frac{3x}{4} < 1 \iff 3x > -4$$

- Se ramener à une étude de signe en passant tous les termes du même côté.

$$x^2 - 2 \leq 2 \iff x^2 - 4 \leq 0$$

Factoriser ou réduire au même dénominateur l'expression à gauche de l'inéquation, puis utiliser un tableau de signe pour résoudre l'inéquation :

$$x^2 - 4 \leq 0 \iff (x-2)(x+2) \leq 0$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$(x-2)(x+2) \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$$

- Construire un tableau de signe pour résoudre les inéquations du second degré (en passant au préalable par le calcul du discriminant).
- Utilisation de la fonction logarithme népérien pour simplifier des exponentielles et réciproquement.

◦ **Exercice 2** Résoudre méthodiquement chacune des inéquations suivantes :

(1) $\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}x - 2$

(2) $(x-1)(2x-6) \leq 0$

(3) $\frac{2x-1}{3x+2} \geq -1$

(4) $\frac{x}{x-1} < 1$

(5) $x^2 \leq -x$

(6) $\frac{x^2}{2} > 10$

(7) $x^2 - 2x - 15 < 0$

(8) $4x \geq x^2 + 4$

(9) $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

(10) $\frac{2x-1}{1-x} \geq 1 - 2x$

(11) $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{x+3}$

(12) $\frac{2x}{x^2-1} \leq x$

(13) $\ln(\ln(x)) < 0$

(14) $(\ln(x))^2 \leq 1$

(15) $\frac{1-x}{1+x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 0$

(16) $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2}$

(17) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{1}{2}$

(18) $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2}$

Exercice 3 Écrire sous forme de fraction irréductible les quantités suivantes :

(a) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}$

(b) $5 \times \dfrac{3}{12} + 2 \times \dfrac{7}{6}$

(c) $\dfrac{8}{9} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3}$

(d) $\dfrac{1}{\frac{3}{4}} - \dfrac{1}{\frac{3}{7}}$

(e) $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}$

(f) $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4}$

(g) $\dfrac{3}{9} - \dfrac{7}{5} \times \dfrac{2}{9} + \dfrac{8}{45}$

(h) $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{15} \times \dfrac{1}{5}$

(i) $-\dfrac{5}{9} + \dfrac{5}{12} + \dfrac{20}{216} + \dfrac{10}{216}$

(j) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \times \dfrac{1}{3}$

(k) $-30 \times \dfrac{8}{27} - 10 \times \dfrac{6}{27} + 20 \times \dfrac{12}{27}$

(l) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$

Exercice 4 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions suivantes :

(a) $(-1)^{2n}$

(b) $(-1)^{2n+1}$

(c) $2^{n+1} - 2^n$

(d) $2 \times 4^n - 2^{2n}$

(e) $3 \times (-2)^n + (-2)^{n+1}$

(f) $9^{n+2} - 9^{n+1} + 2 \times 3^{2n}$

Exercice 5 Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2}}$

(c) $\sqrt{(-3)^2}$

(d) $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$

(e) $4\sqrt{32} - 5\sqrt{8}$

(f) $\dfrac{\sqrt{49} + \sqrt{25}}{\sqrt{49} - \sqrt{25}}$

(g) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$

(h) $(5 - 3\sqrt{2}) \times (5 + 3\sqrt{2})$

(i) $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2$

◦ **Exercice 6** Simplifier les expressions suivantes pour qu'il n'apparaisse plus de racine carrée au dénominateur.

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

(b) $\dfrac{4}{1 + \sqrt{5}}$

(c) $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

(e) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} - \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

(f) $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} - \dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

Exercice 7 Simplifier les expressions suivantes :

(a) $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2$

(b) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(c) $(a - b)^2 + 4ab$

(d) $(1 - a)^2 - 2(1 - a) + 1$

(e) $(2a + 1)^2 - (2a - 1)^2$

(f) $a^2 + 2a(1 - a) + (1 - a)^2$

Exercice 8 Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5$

(b) $4 \ln 2 - 2 \ln 3$

(c) $\dfrac{3}{2} \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1}{2}\right)$

(d) $2 \ln \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln 3 - 2 \ln 2$

(e) $\ln \left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln \left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln \left(\dfrac{3}{4}\right)$

(f) $\ln \left((2 + \sqrt{3})^2\right) + \ln((2 - \sqrt{3})^2)$

Corrections

Exercice 1 (1) Résolution de l'équation $\frac{3}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a : $\frac{3}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Longleftrightarrow \frac{3}{2}, x + \frac{1}{2}x = 2 + 2 \Longleftrightarrow 2x = 4 \Longleftrightarrow x = 2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}.}$

(2) Résolution de l'équation $\frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{4}$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a : $\frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{4} \Longleftrightarrow 4(x-1) = 3(x+1) \Longleftrightarrow 4x-4 = 3x+3 \Longleftrightarrow 4x-3x = 7 \Longleftrightarrow x = 7$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{7\}.}$

(3) Résolution de l'équation $\frac{x-2}{x+2} = -3$

Domaine : Le quotient $\frac{x-2}{x+2}$ existe si $x + 2 \neq 0$, soit $x \neq -2$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Résolution : On a $\frac{x-2}{x+2} = -3 \Longleftrightarrow x - 2 = -3(x+2) \Longleftrightarrow x - 2 = -3x - 6 \Longleftrightarrow x + 3x = 2 - 6 \Longleftrightarrow 4x = -4 \Longleftrightarrow x = -1$
De plus, $-1 \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1\}.}$

(4) Résolution de l'équation $\frac{6x-2}{3x+2} = 3$

Domaine : Le quotient $\frac{6x-2}{3x+2}$ existe si $3x + 2 \neq 0$, soit $x \neq -\frac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Résolution : On a : $\frac{6x-2}{3x+2} = 2 \Longleftrightarrow 6x - 2 = 2(3x+2) \Longleftrightarrow 6x - 2 = 6x + 4 \Longleftrightarrow -2 = 4$
Or la proposition $-2 = 4$ est fausse, donc il ne peut pas y avoir de solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(5) Résolution de l'équation $5 + \frac{4}{x-1} = 6$

Domaine : Le quotient $\frac{4}{x-1}$ existe si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $5 + \frac{4}{x-1} = 6 \Longleftrightarrow \frac{4}{x-1} = 1 \Longleftrightarrow 4 = x - 1 \Longleftrightarrow x = 5$
De plus, $5 \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{5\}.}$

(6) Résolution de l'équation $x^2 = -3x$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = -3x \Longleftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Longleftrightarrow x(x+3) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-3, 0\}.}$

(7) Résolution de l'équation $x^2 = 16$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = 16 \Longleftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Longleftrightarrow x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-4, 4\}.}$

(8) Résolution de l'équation $x^2 = 2x + 3$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = 2x + 3 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
Or le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 - 4}{2} = -1$ et $\dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = 3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 3\}.}$

(9) Résolution de l'équation $x^2 = x - 1$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = x - 1 \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$.
Or le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(10) Résolution de l'équation $3x^2 + 5x + 2 = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $3x^2 + 5x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$ donc l'équation $3x^2 + 5x + 2$ admet deux solutions données par $\dfrac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 3} = -1$ et $\dfrac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 3} = -\dfrac{2}{3}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\left\{-\frac{2}{3}, -1\right\}.}$

(11) Résolution de l'équation $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{16}{9} = \dfrac{64}{9} - \dfrac{64}{9} = 0$ donc l'équation $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$ admet une unique solution donnée par $\dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{3}\right\}.}$

(12) Résolution de l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2 - 2x - 4$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{2 - \sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $\dfrac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}.}$

(13) Résolution de l'équation $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : D'après la règle du produit nul, $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Longleftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ donc l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$ et $\dfrac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$.
Puis $x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$. Donc l'équation étudiée admet trois solutions données par -1, 1 et 2.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 1, 2\}.}$

(14) Résolution de l'équation $\dfrac{x + 1}{x - 1} = x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x+1}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x+1}{x-1} = x \iff x+1 = x(x-1) \iff x+1 = x^2 - x \iff x^2 - 2x - 1 = 0$
Or le trinôme $x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
De plus, $1 - \sqrt{2} \in \mathcal{D}$ et $1 + \sqrt{2} \in \mathcal{D}$ car $\sqrt{2} \neq 0$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}.}$

(15) Résolution de l'équation $\dfrac{x+1}{x-1} = -x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x+1}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x+1}{x-1} = -x \iff x+1 = -x(x-1) \iff x+1 = -x^2 + x \iff x^2 = -1$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc l'équation $x^2 = -1$ n'admet aucune solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(16) Résolution de l'équation $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+4}{x+2}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x+1}{x+3}$ existe si $x+3 \neq 0$, soit $x \neq -3$ et le quotient $\dfrac{x+4}{x+2}$ existe si $x+2 \neq 0$, soit $x \neq -2$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+4}{x+2} \iff (x+1)(x+2) = (x+3)(x+4) \iff x^2+3x+2 = x^2+7x+12 \iff 3x+2 = 7x+12 \iff 2 - 12 = 7x - 3x \iff -10 = 4x \iff x = -\dfrac{10}{4} \iff x = -\dfrac{5}{2}$.
De plus, $-\dfrac{5}{2} \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}.}$

(17) Résolution de l'équation $\dfrac{2x-1}{x^2-1} = 0$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x-1}{x^2-1}$ existe si $x^2 - 1 \neq 0$.
Or $x^2 - 1 \neq 0 \iff x^2 \neq 1 \iff x \neq -1$ et $x \neq 1$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x-1}{x^2-1} = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
De plus, $\dfrac{1}{2} \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}.}$

(18) Résolution de l'équation $1 - \dfrac{1}{x^2+1} = x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1}{x^2+1}$ existe si $x^2 + 1 \neq 0$.
Or $x^2 + 1 \neq 0 \iff x^2 \neq -1$, ce qui est toujours vrai. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $1 - \dfrac{1}{x^2+1} = x \iff \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = x \iff \dfrac{x^2}{x^2+1} = x \iff x^2 = x(x^2+1) \iff x^2 = x^3 + x \iff x^3 - x^2 + x = 0 \iff x(x^2 - x + 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$.
Or le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ ne possède aucune solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset.}$

(19) Résolution de l'équation $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=0$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ existe si $x-1\neq 0$, soit $x\neq 1$. Donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Résolution : D'après la règle du quotient nul, $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=0 \iff x^2+x-2=0$.
Or le trinôme x^2+x-2 a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times 1\times(-2)=1+8=9>0$ donc l'équation $x^2+x-2=0$ admet deux solutions données par $\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$ et $\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$.
Or $-2\in\mathcal{D}$ et $1\notin\mathcal{D}$. Donc l'équation étudiée admet une unique solution donnée par $x=-2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\}.}$

(20) Résolution de l'équation $\ln(x)-\ln(x-1)=1$

Domaine : L'expression $\ln(x)$ existe si $x>0$ et l'expression $\ln(x-1)$ existe si $x-1>0$, soit $x>1$.
Donc $\mathcal{D}=]1,+\infty[$.

Résolution : On a $\ln(x)-\ln(x-1)=1 \iff \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1 \iff \dfrac{x}{x-1}=e \iff x=e(x-1)\iff x=ex-e\iff e=ex-x\iff e=x(e-1)\iff x=\dfrac{e}{e-1}$ car $e-1\neq 0$.
De plus, $e>e-1$, donc $\dfrac{e}{e-1}>1$, donc $\dfrac{e}{e-1}\in\mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{e}{e-1}\right\}.}$

(21) Résolution de l'équation $\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\ln 2$

Domaine : L'expression $x+\dfrac{1}{x}$ existe si $x\neq 0$.
L'expression $\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ existe si $x+\dfrac{1}{x}>0$.
Or $x+\dfrac{1}{x}>0\iff \dfrac{x^2+1}{x}>0\iff x>0$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$.
Donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}_+^*$.

Résolution : On a $\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\ln 2\iff 1+\dfrac{1}{x}=2\iff \dfrac{x^2+1}{x}=2\iff x^2+1=2x\iff x^2-2x+1=0\iff (x-1)^2=0\iff x-1=0\iff x=1$.
De plus $1\in\mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\{1\}.}$

(22) Résolution de l'équation $\ln\left(3x-2x^2\right)=0$

Domaine : L'expression $\ln(3x-2x^2)$ existe si $3x-2x^2>0$.
Or $3x-2x^2>0\iff x(3-2x)>0$. On dresse le tableau :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3-2x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x(3-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau, $x(3-2x)>0\iff 0<x<\dfrac{3}{2}$.

Donc $\mathcal{D}=\left]0,\dfrac{3}{2}\right[$.

Résolution : On a $\ln(3x-2x^2)=0 \iff 3x-2x^2=1 \iff 2x^2-3x+1=0$.
Or le trinôme $2x^2-3x+1$ a pour discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$ donc l'équation $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions données par $\dfrac{3-\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{1}}{2\times 2}=1$.
De plus, $\dfrac{1}{2}\in\mathcal{D}$ et $1\in\mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2},1\right\}.}$

(23) Résolution de l'équation $e^{4x^2-1}=\dfrac{1}{e^{3x}}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1}{e^{3x}}$ existe si $e^{3x}\neq 0$, ce qui est toujours le cas par propriété de la fonction exponentielle, donc on a $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On a $e^{4x^2-1}=e^{-3x} \iff 4x^2-1=-3x \iff 4x^2+3x-1=0$.
Or le trinôme $4x^2+3x-1$ a pour discriminant $\Delta=3^2-4\times 4\times(-1)=9+16=25>0$ donc l'équation $4x^2+3x-1=0$ admet deux solutions données par $\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times 4}=-1$ et $\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times 4}=\dfrac{1}{4}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-1,\frac{1}{4}\right\}.}$

(24) Résolution de l'équation $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}$

Domaine : L'expression $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ existe si $e^x+1\neq 0$.
Or $e^x+1\neq 0 \iff e^x\neq -1$, ce qui est toujours vrai par propriété de l'exponentielle.
Donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2} \iff 2(e^x-1)=e^x+1 \iff 2e^x-2=e^x+1 \iff 2e^x-e^x=1-(-2) \iff e^x=3 \iff x=\ln 3$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\{\ln 3\}.}$

Exercice 2 (1) $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}x-2$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}x-2 \iff 2-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}x \iff \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{4}x \iff 2\leq x\,;$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=[2,+\infty[.}$

(2) $(x-1)(2x-6)\leq 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x-1)(2x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau, $(x-1)(2x-6)\leq 0 \iff 1\leq x\leq 3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=[1,3].}$

(3) $\dfrac{2x-1}{3x+2}\geq -1$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x-1}{3x+2} \geq -1$ existe si $3x+2 \neq 0$, soit $x \neq -\dfrac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x-1}{3x+2} \geq -1 \iff \dfrac{2x-1}{3x+2} + 1 \geq 0 \iff \dfrac{2x-1+3x+2}{3x+2} \geq 0 \iff \dfrac{5x+1}{3x+2} \geq 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$-\dfrac{1}{5}$		$+\infty$
signe de $5x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{5x+1}{3x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par lecture du tableau, $\dfrac{5x+1}{3x+2} \geq 0 \iff x < -\dfrac{2}{3}$ ou $x \geq -\dfrac{1}{5}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left[-\dfrac{1}{5}, +\infty\right[.}$

(4) $\dfrac{x}{x-1} < 1$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x}{x-1} < 1$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x}{x-1} < 1 \iff \dfrac{x}{x-1} - 1 < 0 \iff \dfrac{x-(x-1)}{x-1} < 0 \iff \dfrac{1}{x-1} < 0 \iff x-1 < 0 \iff$ $x < 1$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 1[.}$

(5) $x^2 \leq -x$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 \leq -x \iff x^2 + x \leq 0 \iff x(x+1) \leq 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $x(x+1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 0$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = [-1, 0].}$

(6) $\dfrac{x^2}{2} > 10$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{x^2}{2} > 10 \iff x^2 > 20 \iff x^2 - 20 > 0 \iff x^2 - (\sqrt{20})^2 > 0 \iff (x-\sqrt{20})(x+\sqrt{20}) > 0 \iff (x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) > 0$
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-2\sqrt{5}$		$2\sqrt{5}$		$+\infty$
signe de $x-2\sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^2-20		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $(x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) > 0 \iff x < -2\sqrt{5}$ ou $x > 2\sqrt{5}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2\sqrt{5}[\cup]2\sqrt{5}, +\infty[.}$

(7) $x^2 - 2x - 15 < 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2-2x-15 < 0$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2-4\times1\times(-15) = 4+60 = 64 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 15 = 0$ possède deux solutions données par $\dfrac{2-\sqrt{64}}{2} = -3$ et $\dfrac{2+\sqrt{64}}{2} = 5$.
D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
signe de $x^2 - 2x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $x^2 - 2x - 15 < 0 \iff -3 < x < 5$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-3, 5[.}$

(8) $4x \geq x^2 + 4$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $4x \geq x^2 + 4 \iff x^2 - 4x + 4 \leq 0 \iff (x-2)^2 \leq 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}.}$

(9) $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-1) = 4+4 = 8 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ possède deux solutions $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecteur du tableau : $x^2 - 2x - 1 \leq 0 \iff 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}].}$

(10) $\dfrac{2x-1}{1-x} \geq 1 - 2x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x-1}{1-x}$ existe si $1 - x \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x-1}{1-x} \geq 1-2x \iff \dfrac{2x-1}{1-x} + 2x - 1 \geq 0 \iff \dfrac{2x-1+(1-x)(2x-1)}{1-x} \geq 0 \iff \dfrac{(2x-1)(1+1-x)}{1-x} \geq 0 \iff \dfrac{(2x-1)(2-x)}{1-x} \geq 0$
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\dfrac{(2x-1)(2-x)}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{(2x-1)(2-x)}{1-x} \geq 0 \iff \dfrac{1}{2} \leq x < 1$ ou $x \geq 2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[.}$

(11) $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{3}{x+3}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$ et le quotient $\dfrac{1}{x+3}$ existe si $x+3 \neq 0$, soit $x \neq -3$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{3}{x+3} \iff \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x+3} \leq 0 \iff \dfrac{(x+3)-3(x-1)}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \iff \dfrac{6-2x}{(x-1)(x+3)} \leq 0.$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
signe de $6-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{6-2x}{(x-1)(x+3)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{6-2x}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \iff -3 < x < 1$ ou $x \geq 3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-3, 1[\cup [3, +\infty[.}$

(12) $\dfrac{2x}{x^2-1} \leq x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x}{x^2-1}$ existe si $x^2-1 \neq 0$.
Or $x^2-1 \neq 0 \iff x^2 \neq 1 \iff x \neq -1$ et $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x}{x^2-1} \leq x \iff x - \dfrac{2x}{x^2-1} \geq 0 \iff \dfrac{x(x^2-1)-2x}{x^2-1} \geq 0 \iff \dfrac{x^3-3x}{x^2-1} \geq 0 \iff \dfrac{x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \iff \dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)} \geq 0.$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $\dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \iff -\sqrt{3} \leq x < -1$ ou $0 \leq x < 1$ ou $x \geq \sqrt{3}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\sqrt{3}, -1[\cup [0, 1[\cup [\sqrt{3}, +\infty[.}$

(13) $\ln(\ln(x)) < 0$

Domaine : L'expression $\ln(x)$ existe si $x > 0$ et dans ce cas, l'expression $\ln(\ln(x))$ existe si $\ln(x) > 0$.
Or $\ln(x) > 0 \iff x > 1$. Donc $\mathcal{D} =]1, +\infty[$.

Résolution : On a $\ln(\ln(x)) < 0 \iff \ln(x) < e^0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e^1 \iff x < e$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]1, e[.}$

(14) $(\ln(x))^2 \leq 1$

Domaine : L'expression $\ln x$ existe à condition que $x > 0$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

Résolution : On a $(\ln(x))^2 \leq 1 \Longleftrightarrow (\ln(x))^2 - 1 \leq 0 \Longleftrightarrow (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1) \leq 0$.
Or $\ln(x) - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq e$ et $\ln(x) + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Longleftrightarrow x \geq \dfrac{1}{e}$.
On peut donc dresser le tableau de signe :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
signe de $\ln(x) - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\ln(x) + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1) \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{e} \leq x \leq e$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{e}, e\right]}$.

(15) $\dfrac{1-x}{1+x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1-x}{1+x}$ existe si $1 + x \neq 0$, soit $x \neq -1$.
Le quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ existe si $1 - x \neq 0$, soit $x \neq 1$. Dans ce cas, l'expression $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ existe si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $1 + x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $1 - x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 1$. Donc $\mathcal{D} =]-1, 1[$.

Résolution : On a $\dfrac{1-x}{1+x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\frac{1+x}{1-x}} > 0 \Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0$ car $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$. Or $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 1 \Longleftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} - 1 > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1 + x - (1-x)}{1-x} > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2x}{1-x} > 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $2x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $1 - x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{2x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{2x}{1-x} > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]0, 1[}$.

(16) $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2}$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2} \iff -x^2 < -(x+1)^2 \iff x^2 > (x+1)^2 \iff x^2 > x^2 + 2x + 1 \iff 0 > 2x + 1 \iff 2x < -1 \iff x < -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[}$.

(17) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{1}{2}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ existe si $e^x + e^{-x} \neq 0$.
Or $e^x + e^{-x} \neq 0 \iff e^x \neq -e^{-x}$ ce qui est toujours vrai car $e^x > 0$ et $-e^{-x} < 0$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} - \dfrac{1}{2} < 0 \iff \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} - \dfrac{1}{2} < 0 \iff \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \dfrac{1}{2} < 0 \iff \dfrac{2(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)}{2(e^{2x} + 1)} < 0 \iff \dfrac{e^{2x} - 3}{2(e^{2x} + 1)} < 0$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$, donc $2(e^{2x} + 1) > 0$.
Donc $\dfrac{e^{2x} - 3}{2(e^{2x} + 1)} < 0 \iff e^{2x} - 3 < 0 \iff e^{2x} < 3 \iff 2x < \ln(3) \iff x < \dfrac{\ln(3)}{2}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, \dfrac{\ln(3)}{2}\right[}$.

(18) $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2}$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2} \iff \dfrac{2}{e^{4x^2}} \geq \dfrac{1}{e^{x^2}} \iff \dfrac{2}{e^{4x^2}} - \dfrac{1}{e^{x^2}} \geq 0 \iff \dfrac{2 - e^{3x^2}}{e^{4x^2}} \geq 0$ car on a l'égalité $e^{x^2} e^{3x^2} = e^{4x^2}$, ce qui a permis de réduire au plus petit dénominateur commun.
Or $\dfrac{2 - e^{3x^2}}{e^{4x^2}} \geq 0 \iff 2 - e^{3x^2} \geq 0$ car $e^{4x^2} > 0$.
Or $2 - e^{3x^2} \geq 0 \iff e^{3x^2} \leq 2 \iff 3x^2 \leq \ln(2) \iff x^2 \leq \dfrac{\ln(2)}{3} \iff -\sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[-\sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}, \sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}\right]}$.

Exercice 3 (a) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

(b) $5\times\frac{3}{12}+2\times\frac{7}{6}=\frac{43}{12}$

(c) $\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=1$

(d) $\frac{1}{\frac{3}{4}}-\frac{1}{\frac{3}{7}}=-1$

(e) $\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{14}{45}$

(f) $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$

(g) $\frac{3}{9}-\frac{7}{5}\times\frac{2}{9}+\frac{8}{45}=\frac{1}{5}$

(h) $\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\times\frac{1}{5}=\frac{32}{75}$

(i) $(-1)\times\frac{5}{9}+1\times\frac{5}{12}+4\times\frac{5}{216}+10\times\frac{1}{216}=0$

(j) $\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{13}{27}$

(k) $-30\times\frac{8}{27}-10\times\frac{6}{27}+20\times\frac{12}{27}=-\frac{20}{9}$

(l) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

Exercice 4 (a) $(-1)^{2n}=1$

(b) $(-1)^{2n+1}=-1$

(c) $2^{n+1}-2^n=2^n$

(d) $2\times 4^n-2^{2n}=4^n$

(e) $3\times(-2)^n+(-2)^{n+1}=(-2)^n$

(f) $9^{n+2}-9^{n+1}+2\times 3^{2n}=74\times 9^n$

Exercice 5 (a) $\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$

(b) $\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{(-3)^2}=3$

(d) $\frac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

(e) $4\sqrt{32}-5\sqrt{8}=6\sqrt{2}$

(f) $\frac{\sqrt{49}+\sqrt{25}}{\sqrt{49}-\sqrt{25}}=6$

(g) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$

(h) $(5-3\sqrt{2})\times(5+3\sqrt{2})=7$

(i) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=2$

Exercice 6 (a) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

(b) $\frac{4}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

(c) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3$

(d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3}$

(e) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}-15}{2}$

(f) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}$

Exercice 7 (a) $(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b) + (a-b)^2 = 4b^2$

(b) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

(c) $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

(d) $(1-a)^2 - 2(1-a) + 1 = a^2$

(e) $(2a+1)^2 - (2a-1)^2 = 8a$

(f) $a^2 + 2a(1-a) + (1-a)^2 = 1$

Exercice 8 (a) $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 = \ln(30)$

(b) $4\ln 2 - 2\ln 3 = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right)$

(c) $\dfrac{3}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2$

(d) $2\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln 3 - 2\ln 2 = \ln\left(\dfrac{27}{16}\right)$

(e) $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = -\ln(4)$

(f) $\ln\left((2+\sqrt{3})^2\right) + \ln((2-\sqrt{3})^2) = 0$